***Лабораторная работа № 2.***СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ.

**Метод Монте-Карло: единичный жребий и его реализация. Статистическая проверка законов алгебры событий.**

*Цель*: уяснить суть законов алгебры событий; ознакомиться с методом единичного жребия, применяемым в мето­де Монте-Карло для разыгрывания случайных событий; изучить некоторые функции ЭТ Excel.

**Краткие теоретические сведения.**

1. ***Алгебра событий***

Суммой событий А и В называется событие S = А + В, которое состо­ит в наступлении хотя бы одного из них.

Произведением событий А и В называется событие D = АВ, состоя­щее в их совместном появлении.

Определения суммы и произведения событий распространяются на любое (конечное) число слагаемых или сомножителей.

Пример 1. Если А - появление 1 очка, В - 3 очков, С - 5 очков при одном бросании игральной кости, то S = А + В + С - появление нечётно­го числа очков. Если А - появление дамы, а В - появление пиковой масти при вытягивании одной карты из колоды, то D = АВ есть появление пико­вой дамы.

События А и В называются несовместными, если они не могут наступить в одном и том же опыте. Ясно, что для таких событий Р(АВ) = 0.

Группа событий называется полной, если в результате опыта обяза­тельно наступает хотя бы одно из этих событий.

Два события называются противоположными, если это несовмест­ные события, образующие полную группу.

Пример 2. Рассмотрим в качестве опыта, приводящего к наступле­нию различных событий, одно бросание игральной кости. Пусть *А* - появ­ление единицы, В - двойки, С - единицы, тройки или пятёрки, D - четвёр­ки или шестёрки. Тогда:

* событие А совместно с событием *С*, но несовместно с событиями BиD;
* события А, В, С и D в совокупности образуют полную группу, но даже если событие А исключить, группа не утратит полноты;
* ни одна пара событий, выбранная из группы А, В, С, D, не являет­ся парой противоположных событий;
* события С и В + D являются противоположными.

**2. *Вероятность суммы событий***

Справедлива формула

Р(*А* + *В*) = Р(*А*)+Р(*В*)-Р(*АВ*). (1)

Из этого основного утверждения вытекает целый ряд очевидных следствий:

* 1. Если события А и В несовместны, то Р(А + В) = Р( А) + Р(В).
  2. Если события А1, А2, ..., Ап образуют полную группу несовместных событий, то 
  3. Для двух противоположных событий .
  4. Формулу для вероятности суммы трёх и более совместных событий

мы не рассматриваем. В этом случае гораздо проще «действовать» через противоположное событие.

Пример 3. Найти вероятность того, что при бросании двух монет хо­тя бы на одной из них выпадет «орёл».

1-й способ. Согласно классическому определению вероятности, по­лучаем Р(А)=3/4, т. к. существует 4 равновозможных исхода («орёл»-«орёл», «орёл»-«решка», «решка»-«орёл» и «решка-решка»), из которых 3 исхода являются благоприятными.

2-й способ. Рассматривая событие А как сумму двух событий («орёл» на первой монете, «орёл» на второй монете), по формуле (1) для вероятности суммы получаем Р(А) =1/2+1/2-1/4=3/4, где вероятность произ­ведения событий (т. е. вероятность события «орёл»-«орёл») найдена по классическому определению.

**3. *Зависимость событий. Вероятность произведения событий***

Условной вероятностью Р(А/В) называется вероятность события А, вычисленная при условии, что событие В произошло. Событие А называ­ется зависимым от события В, если Р(А/В)≠Р(А). Зависимость событий всегда взаимна, т. е. если А зависит от события В, то и В зависит от собы­тия А

Вероятность произведения двух событий определяется формулой

Р(*АВ*) = Р(*А*)Р(*В*/*А*). (2)

Для независимых событий

Р(АВ) = Р(А)Р(В). (3)

Пример 3 можно решить ещё одним (уже третьим) способом. Если *А* - появ­ление хотя бы одного «орла», то противоположное событие - появление

«решек» на обеих брошенных монетах. Найдём Р()=1/2\*1/2=1/4 как вероятность произведения независимых событий (3). Тогда

Р(А)=1-Р()=3/4.

Пример 4. Студент сдаёт два экзамена: физику и математику. Он оценивает свои шансы получить «отлично» по физике как 1 против 3, «от­лично» по математике как 1 против 2. Каковы шансы студента получить хотя бы одну оценку «отлично» на двух экзаменах?

Введём вероятности отличной сдачи экзаменов по физике Р(А1)=1/4 и по математике Р(А2)=1/3. Как и в примере 3, здесь возмож­ны разные способы решения.

* + - 1. По формуле (1) с учётом (3) получим

Р(*А*)=Р(*А*1)+Р(*А*2)-Р(*А*1)Р(*А*2) = 1/4 +1/3 -1/12 = 1/2 .

* + - 1. Через понятие противоположного события получим

Р(*А*)=1-(1- Р(*А*1))(1- Р(*А*2))=1-3/4\*2/3=1/2.

**4. *Формула полной вероятности***

Пусть событие А может произойти вместе с любым из несовместных друг с другом событий Н1, Н2*,* ..., Нп, образующих полную группу (они называются гипотезами). Тогда вероятность события А определяется как

 (4)

Пример 5. Среди театральных зрителей женщин вдвое больше, чем мужчин. Из каждых 25 мужчин 1 является дальтоником, а среди женщин это заболевание встречается в 10 раз реже. Найти вероятность того, что выбранный наугад театральный зритель - дальтоник.

Обозначим события: Н1 - зритель - мужчина; Н2 - зритель - женщи­на; *А* - зритель - дальтоник.

Тогда Р(Н1) = 1/3; Р(Н2) = 2/3; Р(А/ Н1)= 1/25; Р(А/Н2) = 1/250 . Следовательно, по формуле полной вероятности

Р(*А*)=1/3\*1/25+2/3\*1/250=0,016.

**5. *Единичные жребии в методе Монте-Карло***

В предыдущих работах мы рассматривали применение метода Монте-Карло в зада­чах с равновозможными исходами. Теперь рассмотрим общий подход к мо­делированию случайных событий и величин с помощью единичных жребиев (т. е. опытов со случайным исходом). Единичный жре­бий может быть реализован с помощью генерации случайного числа - значе­ния случайной величины, равномерно распределённой на интервале от 0 до 1 (Лр1 и 2). Обозначим такое случайное число через *γ*. В рамках выполнения данной работы рассмотрим правила розыгрыша событий для простейшего случая, когда речь идет о двух событиях, образующих полную группу.

Пусть нам известно, что событие *А* имеет вероятность *р*. Можно условиться считать, что если *γ* приняло значение меньше *р*, то событие *А* произошло; при *γ>р* событие не произошло. Для случая двух событий процесс розыгрыша можно представить на схеме (рис.1).

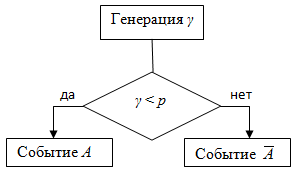


Рис.1 – Схема розыгрыша двух событий

Вопрос о том, почему «граничный» случай *γ=р* трактуется как ненаступление события, не имеет никакого практического значения: учитывая точность компьютерного представления действительных чисел, вероятностью такого совпадения можно просто пренебречь. Во всяком случае, на результат статистического моделирования это никакого влияния не оказывает.

**Задание для выполнения лабораторной работы**

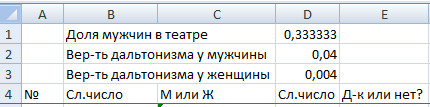
В ходе выполнения лабораторной работы необходимо построить модели появления событий, описанных в примерах 4,5 и для задачи из индивидуального варианта, на основе метода Монте-Карло и оценить вероятности этих событий, проведя 10000 испытаний.

Смысл настоящей работы состоит в том, чтобы, моделируя методом Монте-Карло случайные события, в которых отсутствует симметрия исхо­дов, научиться статистически оценивать вероятности событий.

Порядок выполнения задания.

1. Для моделирования событий в соответствии с примером 5 необходимо выполнить следующие действия.

1.1 Создать таблицу следующего вида:



В строках 1-3 представлены исходные данные задачи. В столбце А располагаются номера опытов. В столбцах B и D генерируются равномерные случайные числа *γ*1 и *γ*2 в диапазоне [0, 1]. В столбце В разыгрывается случайный выбор из зрительного зала мужчины или женщины, а в столбце D разыгрывается наличие дальтонизма у зрителя.

В столбце С (М или Ж), в соответствии с розыгрышем, устанавливается пол зрителя по формуле:

.

Этой формуле соответствует схема, представленная на рис.2.

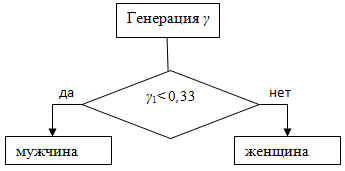


Рис.2 – Схема выбора пола зрителя в зале

В столбце Е (Д-к или нет), в соответствии с розыгрышем устанавливается наличие дальтонизма по формуле:

.

Этой формуле соответствует схема, представленная на рис.3.

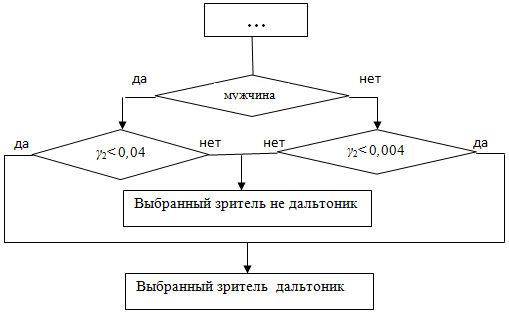
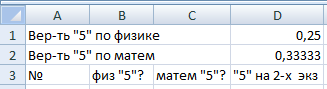


Рис.3 – Схема выбора зрителя-дальтоника.

1.2 Используя функцию СЧЕТЕСЛИ определить вероятность того, что выбранный случайным образом зритель из зала является дальтоником. В результате моделирования и подсчета получен результат: . Теоретически рассчитанная вероятность равна 0,016. Результаты моделирования колеблются в диапазоне 0,014-0,018.

2. Для моделирования событий в соответствии с примером 5 необходимо выполнить следующие действия.

2.1 Создать таблицу следующего вида:



В строках 1,2 содержатся исходные данные задачи. В столбец А заносится № опыта, В столбцах В и С разыгрывается возможность получения студентом пятерки по соответствующим предметам на основании формул:



.

В столбце D выставляется единица, если хотя бы один экзамен сдан на «отлично» в соответствии с формулой:

.

Далее, используя данные столбца D, можно определить вероятность, с которой студент может получить на экзаменах хотя бы одну пятерку. В результате моделирования и подсчета получен результат: . При решении задачи на основании теорем вероятность равна 0,5.

3. Решить задачу (пример 6) из Приложения А:

- на основе применения теорем и формул теории вероятности;

- на основе статистического моделирования.

**Содержание отчета.**

1. Титульный лист.

2. Цель работы.

3. Постановка задачи.

4. Порядок выполнения работы:

- решение задач на основании применения теорем и формул;

- фрагмент таблицы с результатами моделирования;

- используемые формулы ЭТ Excel;

- схемы розыгрышей и выбора соответствующих событий для примера 4 и примера 6.

5. Анализ результатов и выводы.

**Контрольные вопросы.**

* 1. Что такое сумма событий, произведение событий, несовместные события, полная группа событий, противоположные события?
  2. Запишите формулу для суммы двух событий, сформулируйте следствия из неё.
  3. Что такое зависимые и независимые события?
  4. Как вычисляется вероятность произведения событий?
  5. Запишите и объясните смысл формулы полной вероятности.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Индивидуальное задание

**Пример 6**. В партии *а* деталей изготовлены на первом станке, *b* – на втором. Известно, что вероятности выпуска бракованной детали станках соответственно равны *р*1 и *р*2. Какова вероятность, что взятая наудачу деталь окажется бракованной?

Вариант решения задачи выбирать в соответствии с номером студента в списке группы.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер варианта | *а* | *b* | *р*1 | *р*2 |
| 1 | 30 | 25 | 0.01 | 0.03 |
| 2 | 32 | 27 | 0.02 | 0.04 |
| 3 | 34 | 23 | 0.03 | 0.05 |
| 4 | 28 | 21 | 0.04 | 0.06 |
| 5 | 26 | 19 | 0.05 | 0.07 |
| 6 | 31 | 29 | 0.06 | 0.08 |
| 7 | 33 | 31 | 0.06 | 0.09 |
| 8 | 35 | 18 | 0.06 | 0.03 |
| 9 | 27 | 16 | 0.06 | 0.04 |
| 10 | 29 | 14 | 0.01 | 0.05 |
| 11 | 18 | 15 | 0.02 | 0.06 |
| 12 | 20 | 17 | 0.03 | 0.07 |
| 13 | 22 | 19 | 0.04 | 0.08 |
| 14 | 24 | 10 | 0.05 | 0.09 |
| 15 | 17 | 12 | 0.06 | 0.03 |
| 16 | 19 | 14 | 0.07 | 0.05 |
| 17 | 21 | 16 | 0.08 | 0.07 |
| 18 | 23 | 18 | 0.09 | 0.02 |
| 19 | 25 | 20 | 0.01 | 0.04 |
| 20 | 13 | 21 | 0.02 | 0.06 |
| 21 | 15 | 23 | 0.03 | 0.08 |
| 22 | 14 | 25 | 0.04 | 0.01 |
| 23 | 16 | 27 | 0.05 | 0.02 |
| 24 | 18 | 29 | 0.06 | 0.03 |
| 25 | 20 | 31 | 0.07 | 0.04 |
| 26 | 26 | 13 | 0.03 | 0.40 |
| 27 | 28 | 16 | 0.20 | 0.11 |
| 28 | 22 | 27 | 0.04 | 0.07 |
| 29 | 23 | 29 | 0.08 | 0.06 |
| 30 | 24 | 19 | 0.07 | 0.27 |